770. 連續函數ノ擴張トPositive Operation

角谷 靜夫（阪大）

Rヲ metric space, EヲR内ノ閉集合トスレバ、ヨク知ラレタ定理[1]ニヨリEデ定義サレタ任意ノ連続函数 $f(x)$ ハR全体ノ連続函数 $F(x)$ ニ擴張スルコトが出來ル。次ニ問題トナルノハEデ定義サレタ有界ナ連続函数全体ヲ同時ニR全体ノ有界連続函数ニ拡張シテシカモコノ operation

(1) Tietze ノ定理，例ヘバ C. Kuratowski ノ書 Topologie, I. 211頁

ガ C_E ヲ C_R[2] ノ中ヘ寫像スル operation トシテ linear. positive デ且ツ norm ガ 1 デアル、（特ニ constant ニハ constant ガ對應スル）ヤウニスルコトハ出來ナイカト云フコトデアル。即チ、$f(x) \in C_E$ ヲ拡張シタモノガ $F(x) \in C_R$ デアルコトヲ $f \to F$ デ表ハストキ

(1) $f \to F$, $g \to G$ ナラバ $f+g \to F+G$, $\alpha f \to \alpha F$.

（α: real）

(2) $f \to F$, $f \geqq 0$ ナラバ $F \geqq 0$

（(1) ト結合シテ $f \to F$, $g \to G$, $f \geqq g$ ナラバ $F \geqq G$）

(3) $f \to F$ ナラバ $\|f\|_E = \|F\|_R$

（(1) ト結合シテ $f \to F$, $g \to G$ ナラバ $\|f-g\|_E = \|F-G\|_R$）

特ニ $f = const = \alpha$ ナラバ $F = const = \alpha$.

トナル様ニスルコトハ出來ナイカト云フコトデアル。

コレハ當然問題ニナルベキコトデアルガ未ダ論ジタモノヲ見タ事ガナイ。[4]

先ヅ R ガ complex 平面上ノ集合 $|z| \leqq 1$, E ガ円周 $|z| = 1$ デアル場合ヲ考ヘレバ $F(x)$ トシテ $f(x)$ ヲ

---

(2) C_E (C_R) ハ E (R) デ定義サレタ有界連続函数全体ノ空間．任意ノ $f \in C_E$ ($F \in C_R$) ニ對シテ $\|f\|_E = \underset{x \in E}{l.u.b.} |f(x)|$, ($\|F\|_R = \underset{x \in R}{l.u.b.} |F(x)|$) ニヨツテ norm ヲ定義スル。

（註4……次頁へ）

boundary value トスル Dirichlet ノ solution ヲ取レバ十分デアル。一般ノ Dirichlet ノ問題ニ関シテ regular ナ領域トソノ Boundary ノ場合ニハ同様ナ方法デ問題ハ解決サレルガ、Dirichlet ノ solution ガ存在シナイ時ニハ困難ヲ生ズル。例ヘバ R ガ先ノ場合ト同ジク $|z|\leqq 1$ デアリ、E ガ円周 $|z|=1$ ト中心ノ一点 $z=0$ トヨリ出来テヰル時ハ如何。コノトキハ、一点 $z=0$ ヲ $|z|\leqq\frac{1}{2}$ ニマデ拡ゲテ、ソコデ $F(z)=\mathrm{const}=f(0)$ デアルト定義シテ、然ル後、残ル Domain $\frac{1}{2}\leqq|z|\leqq 1$ ニ於テ Dirichlet ノ solution ヲ求ムレバヨイ。シカシ一般ノ場合ニハ、コノ様ナ方法モ用ヒルコトハ出来ナイ。シカモ一般ノ metric space R 内ニ於テハ、Dirichlet ノ problem ト云フコトガ意味ヲ持タナイ。

次ニ E ガ separable ナ場合ニコノ問題ガ可能デアルコトヲ証明シヨウ。（R ハ必ズシモ separable デナクテヨイ）

E ハ separable デアルカラ E 内ニテ dense ナ可附番集合 $D=\{\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n, \cdots\cdots\}$ ガ存在スル。次

---

(4) K. Borsuk ハ (3) ノミニ注目シテ $\|f-g\|_E=\|F-G\|_R$ トナル如キ拡張ヲ論ジテヰル。シカシ (1), (2) ノ條件ハ満足サレテヰナイ。

K. Borsuk: Sur les prolongement des transformations continues, Fund. Math., 28 (1937), 99—110.

ニ任意ノ $x \in R-E$ ニ對シテ $\rho(x) = \underset{\xi \in E}{g.l.b.}\, d(x,\xi) > 0$

ニヨツテ $\rho(x)$ ヲ定義シ任意ノ $\xi \in E$ ニ對シテ

$$\gamma(x,\xi) = 0 \qquad \text{if} \quad d(x,\xi) \geqq 2\rho(x)$$

$$\gamma(x,\xi) = 2 - \frac{d(x,\xi)}{\rho(x)} \qquad \text{if} \quad 2\rho(x) > d(x,\xi) > \rho(x)$$

$$\gamma(x,\xi) = 1 \qquad \text{if} \quad \rho(x) \geqq d(x,\xi)$$

ニヨツテ $\gamma(x,\xi)$ ヲ定義スル。

コノ $\gamma(x,\xi)$ ヲ使ツテ

$$F(x) = f(x), \quad x \in E$$

$$F(x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \gamma(x,\xi_n) f(\xi_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \gamma(x,\xi_n)}, \quad x \in R-E$$

トオケバコノ $F(x)$ ガ求ムル extension デアル。(右辺ノ分母ハ０デナイ、何トナレバ $\rho(x) < d(x,\xi_n) < 2\rho(x)$ ナル ξ_n ハ常ニ少クトモ一ツ存在スルカラ)

先ヅ $F(x)$ ガ R 全体ニ於ケル連続函數デアルコトヲ示サウ。コノタメニハ次ノ二ツノコトヲ示セバ十分デアル。

(a) $x_m \in R-E$, $x_m \to x_0$, $x_0 \in E$ ナルトキ

$$F(x_m) \to F(x_0) = f(x_0)$$

(b) $x_m \in R-E$, $x_m \to x_0$, $x_0 \in R-E$ ナルトキ

$$F(x_m) \to F(x_0)$$

(b) ノ方ハ $F(x)$ ノ定義ノ式ノ右辺ガ分母，分子トモ $R-E$ ニ於ケル x ノ連続函數デ $R-E$ ニテ常ニ >0 トナッテヰルコトカラ明カ。

(a)ノ証明:　$f(x)$ ガ E ニテ連続ナルコトヨリ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $\delta>0$ ガ定マッテ $d(\xi, x_0)<\delta$ ナル $\xi\in E$ ニ對シテ $|f(\xi)-f(x_0)|<\varepsilon$ トナル。次ニ $x_m\to x_0$ ナルコトヨリ m_0 ヲ十分大キクトレバ $m>m_0$ ナルトキ $d(x_m, x_0)<\frac{\delta}{3}$ トナル。故ニ $m>m_0$ ニ対シテ $\rho(x_m)<\frac{\delta}{3}$ 從ッテ $\rho(x_m)\leqq d(x_m,\xi)\leqq 2\rho(x_m)$ ナル如キ $\xi\in E$ ハスベテ $d(\xi,x_0)\leqq d(\xi,x_m)+d(x_m,x_0)<\delta$ ヲ満足スル。即チ. $r(x_m,\xi_n)>0$ ナル $\xi_n\in D$ ハ何レモ $d(\xi_n,x_0)<\delta$ シタガッテ $|f(\xi_n)-f(x_0)|<\varepsilon$ ヲ満足スル。ヨッテ

$$|F(x_m)-f(x_0)|$$

$$\leqq \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}r(x_m,\xi_n)|f(\xi_n)-f(x_0)|}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}r(x_m,\xi_n)}<\varepsilon$$

コレハ $m>m_0$ ニ對シテ成立スル。$\varepsilon>0$ ハ任意デアッタカラ $F(x_m)\longrightarrow f(x_0)$

次ニ此ノ如クシテ與ヘラレタ operation $f\longrightarrow F$ ガ條件 (1), (2), (3) ヲ満足スルコトヲ証明スベキデアルガコレハ何レモ $F(x)$ ノ定義ヨリ明カデアロウ。